Mécanique des fluides

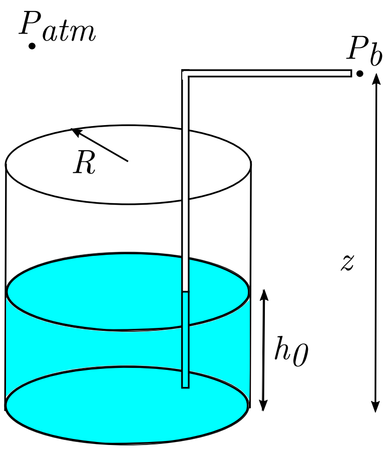
Section de génie civil

TD 3 - Correction

Exercices

Exercice 1 Dans un tube en forme de U, on place un fluide de masse volumique $\rho_1 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$. On ajoute ensuite d'un côté du U un fluide non miscible de masse volumique $\rho_2 < \rho_1$. Que se passe-t-il ? Calculer ρ_2 grâce au résultat de l'expérience effectuée au tableau.

Exercice 2 Un étudiant en vacances à la plage se demande quelle dépression ΔP il doit fournir par aspiration pour que son jus de fruits remonte jusqu'à sa bouche, située à une altitude z. Son verre a un rayon R et est initialement rempli d'une hauteur h_0. Sa paille, de longueur totale l et de rayon r, est posée verticalement dans le verre. Une de ses extrémités touche le fond du verre. Calculer $\Delta P = P_b - P_{atm}$ nécessaire (le volume de jus de fruits est conservé).

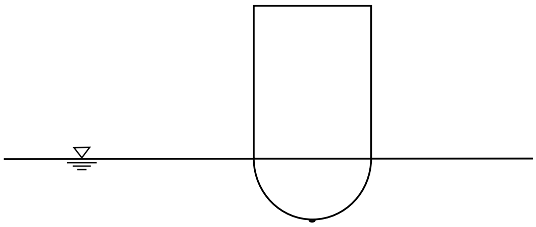


Exercice 3 On dit que la pression atmosphérique P_{atm} ressentie au niveau du sol est équivalente au poids de la colonne d'air par mètre carré au-dessus

du sol :

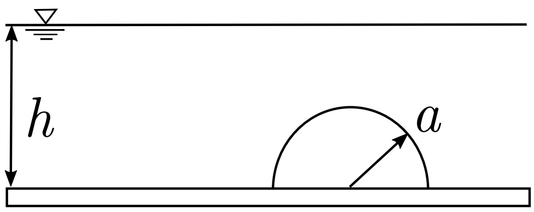
$$\int_0^\infty \rho g \, dz.$$

1. Est-ce vrai ?
2. Même question si on se place sous la coque d'un bateau. Est-ce que la pression au point le plus bas correspond au poids de la colonne de bateau au-dessus de ce point ?



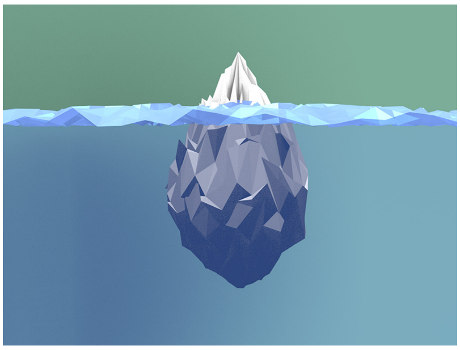
Exercice 4 Le dôme posé au fond du Golfe du Mexique pour colmater la fuite d'hydrocarbure peut être représenté par un hémisphère de rayon a qui repose à une profondeur h dans un fluide de masse volumique ρ.

1. Calculer la force de pression hydrostatique exercée sur le dôme. On prendra $h = 1500$ m, $a = 10$ m, $\rho = 1020$ kg/m^3.
   — *Exprimer la pression $p(\phi, \theta)$ sur le dôme dans les coordonnées sphériques.*
   — *Exprimer la force de pression **verticale** $F_z(\phi, \theta, dS)$ exercée sur un petit élément de surface dS du dôme. NB : $dS = a^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta$.*
   — *Intégrer la force de pression verticale sur toute la surface du dôme.*
2. Si le dôme de béton pèse 2 tonnes et est fixé sur sa circonférence grâce à des ancrages résistants à une force de 10 kN/m, quelle est la pression maximale d'hydrocarbure admissible en son sein ?

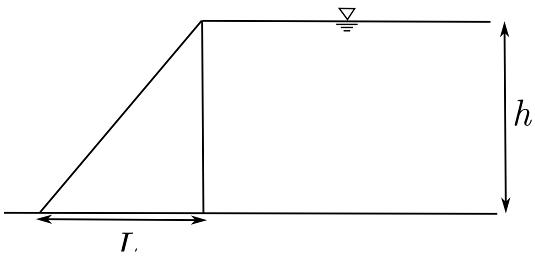


Exercice 5 Un iceberg de masse volumique $\rho_g = 920$ kg/m^3 flotte sur l'océan ($\rho_e = 1020$ kg/m^3). Quelle fraction de son volume se trouve sous l'eau ?

Exercice 6 Un barrage triangulaire de base l et de masse volumique ρ_s retient un plan d'eau de profondeur h et de masse volumique ρ. Quelle est la force de pression (par unité de longueur) exercée sur le barrage ? Quelle

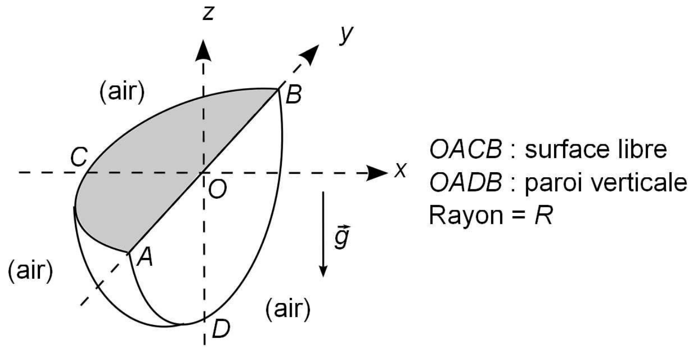


est la condition de non-renversement ?
Indice : pour le non renversement penser aux moments exercés par chacune des forces.



Exercice 7 Un récipient, dont la forme est celle d'un quart de sphère, est limité par une section verticale et une section horizontale, cette dernière étant ouverte à l'air libre. Ce récipient entièrement rempli d'un liquide de masse volumique ρ :

1. Déterminer la résultante des forces de pression exercées sur la paroi verticale ($OADB$) par le liquide et l'air extérieur. Montrer que ces forces sont équivalentes du point de vue de leur résultante et de leur moment résultant, à une force unique passant par un point P de cette paroi (P est le centre de pression), dont on précisera la position.
2. Déterminer la résultante des forces de pression exercées sur la paroi en 1/4 de sphère, et montrer de même l'équivalence à une force unique passant par un centre de pression Q sur cette face.
3. Retrouver la position de P à partir de celle du centre de masse G du liquide, que l'on déterminera au préalable.



Corrections

Exercice 1 Soit P_{atm} la pression atmosphérique à l'extérieur du tuyau et A et B deux points situés à la même altitude dans le premier fluide. En utilisant la loi de Pascal, $\Delta p = \rho g h$, et le fait que $P_A = P_B$, on peut écrire (en prenant le point A à l'interface des deux fluides) :

$$P_{atm} + \rho_2 g h_2 = P_{atm} + \rho_1 g h_1,$$
$$\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1}{h_2} = 1000 \times \frac{h_1}{h_2} \mathrm{kg/m^{-3}}.$$

Exercice 2 Soit r le rayon de la paille, l la longueur de la paille et $= 2\pi r l$ le volume de la paille. Le volume initial de jus de fruits dans le verre, avant que le paille ne soit remplie, est $\pi R^2 h_0$. Le volume final est donc $\pi r^2(l - h_1) + \pi R^2 h_1$. Le volume de soda est bien conservé puisque le fluide ne fait que remonter dans la paille (l'étudiant n'a pas encore commencé à boire le jus de fruit). Soit h_1 la hauteur de soda dans le verre lorsque la paille est remplie, on peut alors écrire :

$$h_1 = \frac{R^2 h_0 - r^2 l}{R^2 - r^2}.$$

La pression qui s'applique à la surface du soda dans le verre est la pression atmosphérique P_{atm}. La pression qui s'applique à l'extrémité de la paille, au niveau de la bouche, est P_b. En égalisant la pression qui s'exerce au fond du verre, loin de la paille, avec celle qui s'exerce au fond du verre, au niveau de l'extrémité de la paille, on peut écrire :

$$P_b + \rho g z = P_{atm} + \rho g h_1,$$
$$\Longrightarrow \Delta P = -\rho g \left(z - \frac{R^2 h_0 - r^2 l}{R^2 - r^2} \right).$$

Exercice 3

1. Oui, c'est vrai. La loi de Pascal permet d'écrire :

$$dP = -\rho g\, dz,$$
$$\int_0^\infty dP = P_\infty - P_{atm}, \Longrightarrow P_\infty - P_{atm} = -\int_0^\infty \rho g\ dz.$$

   Et donc, si $P_\infty \longrightarrow 0$ au sommet de l'atmosphère, $P_{atm} \longrightarrow \int_0^\infty \rho g\ dz = \rho g z_{atm}$ avec z_{atm} l'altitude de la couche atmosphérique.
2. Non, cela correspond au poids de la colonne d'eau au-dessus d'un point dans le même plan horizontal. En effet, dans un fluide incompressible au repos (conditions hydrostatiques), la pression est la même à une altitude donnée. On rappelle qu'une propriété fondamentale de la pression est l'isotropie (identique dans toutes les directions).

Exercice 4

1. Soit ϕ la colatitude (angle zénital) et θ la latitude. La pression peut alors s'exprimer ainsi : $p(\phi,\ \theta) = \rho g(h - a\cos\phi)$. Soit l'élément de surface infinitésimal $dS = a^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta$, la force de pression exercée par le fluide sur cette surface est $d\boldsymbol{F} = -p\boldsymbol{n}\, dS = \rho g(h - a\cos\phi)\boldsymbol{n}\, dS$ avec $\boldsymbol{n}$ la normale à la surface du dôme orientée vers l'extérieur du fluide. La composante verticale (orientée vers le bas) de cette force de pression est $dF_z = \rho g(h - a\cos\phi)\cos\phi\, dS$.

   Intégrer la pression sur le dôme revient à intégrer la composante verticale puisque la composante horizontale s'annule étant donné la symétrie de la surface. La résultante de la force de pression est donc :

$$\begin{aligned} F_{hyd} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \rho g(h - a\cos\phi)a^2 \cos\phi \sin\phi\ d\phi\, d\theta \\ &= \rho g a^2 2\pi \int_0^{\pi/2} h\cos\phi\sin\phi - a\cos^2\phi\sin\phi\ d\phi \\ &= \rho g a^2 2\pi \left[\frac{h}{2}\sin^2\phi + \frac{a}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi/2} = \rho g a^2 \pi\,[h - 2a/3]. \end{aligned}$$

2. Bilan des forces : $F_{hyd} = 4'694'000$ kN, $F_{poids} = 2000\ \mathrm{kg} \times 9,81\ mathrmm\ \mathrm{s}^{-2} = 1'962$ kN, $F_{ancrages} = 10\ \mathrm{kN/m} \times 2\pi r = 6'283$ kN, $F_{in} = F_{poids} + F_{ancrages} + F_{hyd} = 4'694'600$ kN. Pour obtenir la pression intérieure maximum acceptable, il faut diviser la force de pression associée F_{in} par la surface d'application, soit la projection du dôme dans le plan horizontal (la résultante de la force de pression étant orientée verticalement) : $P_{in} = F_{in}/(\pi a^2) = 1'494 \times 10^7\ \mathrm{N\ m^{-2}}$.

Exercice 5 Soit V le volume de l'iceberg et α la fraction immergée. Pour que l'iceberg flotte, la poussée d'Archimède doit contrebalancer le poids : $V\alpha\rho_e g = V\rho_g g$. On obtient : $\alpha = \rho_g/\rho_e = 90\%$.

Exercice 6 La force de pression par unité de largeur s'écrit :

$$\boldsymbol{F}_p = -\int_0^h p\boldsymbol{n}\ dz = \int_0^h \rho g(h-z)\boldsymbol{e_x}\ dz = \rho g h^2/2\boldsymbol{e_x}$$

ou l'on a considéré l'axe $\boldsymbol{e_x}$ à l'horizontal et orienté vers la gauche du schéma (et donc $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e_x}$) et l'axe $\boldsymbol{e_z}$ à la verticale et orienté vers le haut du schéma. On va calculer le basculement par rapport à l'extrémité gauche du barrage. Il y a basculement si la somme des moments exercés en ce point est différente de zéro. Les deux forces qui s'appliquent sont la force de pression et le poids du barrage. La condition d'équilibre s'écrit donc $M_{poids} = M_{Fp}$ (on a projeté les deux moments de force sur l'axe $\boldsymbol{e_y}$). Leur expression est

$$\begin{aligned} M_{poids} &= 2l/3 \times \rho_s g h l/2, \\ dM_{Fp} &= z(h-z)\rho g\ dz \\ \Longrightarrow M_{Fp} &= \int_0^h z(h-z)\rho g\ dz = -\rho g h^3/6. \end{aligned}$$

En égalisant les deux expression on obtient la hauteur d'eau maximale barrage $h = \sqrt{2l^2\rho_s/\rho}$ pour que ce dernier ne bascule pas.

Exercice 7

1. La pression du liquide à l'altitude z est $P_0 - \rho g z$ où P_0 est la pression atmosphérique. Mais l'air ambiant exerce également une pression P_0 de l'autre côté de la paroi et P_0 n'intervient donc pas. La résultante cherchée est donc $\boldsymbol{F}$, telle que $F = \int\int_{(OADB)} -\rho g z\ dS$. Pour calculer cette intégrale, décomposons le 1/2 disque en bandes parallèles à $y'y$, $[z, z+dz]$.

$$\begin{aligned} z &= -R\sin\theta, \\ dS &= 2R\cos\theta\ dz = -2R^2\cos^2\theta\ d\theta, \\ F &= \int_0^{\pi/2} 2\rho g R^3 \sin\theta\cos^2\theta\ d\theta \\ &= 2\rho g R^3\left[-\cos^3\theta/3\right]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

d'où $F = 2\rho g R^3/3$. Le moment des forces de pression par rapport à Oy s'écrit :

$$M_{Oy} = -\int\int_{(OADB)} \varrho g z^2 \, dS = \int_0^{\pi/2} 2\varrho g R^4 \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta$$

avec

$$\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)$$

et

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta) \, d\theta = \frac{\pi}{16}.$$

On a donc $M_{Oy} = -\pi\varrho g R^4/8$. Le moment par rapport à Ox est nul (forces parallèles à Ox) ; celui par rapport à Oz également en raison de la symétrie de la répartition de pression par rapport au plan xOz. Le moment résultant des forces pressantes exercées sur la paroi verticale en O, et par suite en tout point, est donc le même que celui d'une force unique $\boldsymbol{F} = 2\varrho g R^3 \boldsymbol{e_x}/3$, dont le bras de levier passe par le point P de Oz, tel que $M_{Oy} = OP \times F$. On en déduit : $OP = M_{O_y}/F_x = -3\pi R/16$ (le résultat est applicable à tout système de forces parallèles : leur moment est le même que celui d'une force passant par leur barycentre).

2. Les forces de pression exercées sur le 1/4 de sphère sont radiales donc leur moment en O est nul. Analysons l'équilibre du liquide contenu dans le récipient : la contribution de la pression atmosphérique P_0 agit sur la totalité de la surface qui limite le liquide (surface libre et action des parois), elle n'intervient donc pas. En éliminant P_0, le liquide ne subit, en plus de la pesanteur, que des forces de résultante $-\boldsymbol{F}$ de la part de la paroi verticale ($OABD$), et des forces de pression de la part du 1/4 de sphère dont nous noterons la résultante $-\boldsymbol{F}'$. L'équilibre des forces s'écrit donc $m\boldsymbol{g} - \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{0}$ d'où :

$$F'_x = -F_x = -\frac{2}{3}\varrho g R^3,$$
$$F'_z = -mg = -\frac{\pi}{3}\varrho g R^3$$

ou F'_x et F'_z sont les composantes horizontale et verticale de $\boldsymbol{F}'$. Leur moment en O étant nul, les forces de pression exercées sur cette paroi en 1/4 de sphère sont équivalentes à une seule force $\boldsymbol{F}'$ dont la direction passe par O et par un point Q de l'arc de cercle (CD) du plan xOz. Ce point Q fait un angle α avec l'horizontal dont la tangente est défini par

$$\tan\alpha = \frac{F'_z}{F'_x} = \pi/2.$$

3. Il suffit d'annuler le moment des actions exercées sur le liquide, par rapport a Oy, la contribution de P_0 étant nulle. Le moment des actions exercées par la paroi verticale est, compte non tenu de P_0, $OP \times F$; celui qu'exerce le 1/4 de sphère est nul. Enfin le moment des forces de pesanteur par rapport à Oy est $x_G \times mg = \pi\rho R^3 g/3 x_G$. On a donc

$$-OP \times F_x + \frac{\pi}{3}\rho R^3 g x_G = 0$$

d'où $OP = \pi x_G/2 = x_G \tan\alpha$. Le centre de masse G est situé dans le plan de symétrie xOz, et sur la 1re bissectrice des axes Ox et Oy, car le plan bissecteur de ces axes est également plan de symétrie pour le récipient : $x_G = z_G$. En décomposant le volume en 1/2 cylindres d'épaisseur dx et de rayon $\sqrt{R^2 - x^2}$, ($x \in [-R, 0]$), donc de volume $dV = \frac{\pi}{2}(R^2 - x^2)\ dx$ il vient :

$$x_G = \frac{1}{V}\int_{-R}^{0} x\ dV = \frac{3}{2R^3}\int_{-R}^{0} x(R^2 - x^2)\ dx, \quad \left(V = \frac{\pi}{3}R^3\right).$$

Soit $x_G = z_G = -3R/8$ (on a donc $OG = 3R\sqrt{2}/8$). On retrouve alors $OP = -3\pi R/16$.